JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 21, 448–468 (1976)

Potentiel Fin et Algèbres de Fonctions. III

A. DEBIARD ET B. GAVEAU

Institut Henri Poincaré, 11 rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris, France

Communicated by Paul Malliavin

Received May 1975; revised June 1975

INTRODUCTION

Ce travail est une tentative pour appliquer les méthodes de théorie du potentiel fin [1] aux algèbres de fonctions analytiques de plusieurs variables complexes et, pour mettre en évidence dans certains cas particuliers développés par Stolzenberg–Wermer–Basener [2], [3] une théorie du potentiel fin adaptée au spectre bien qu'il n'y ait pas de structure analytique au sens de [2].

Au paragraphe 1, nous introduisons les notions de partie de Jensen et de frontière de Jensen qui semblent jouer en théorie du potentiel, le rôle des parties de Gleason et frontière de Silov en théorie de la structure analytique; en particulier les fonctions d'une algèbre de fonctions sont en un certain sens finement ouvertes sur les parties de Jensen non triviales.

Au paragraphe 2 est donnée une méthode de construction d'enveloppes holomorphiquement convexes de compacts portés par une hypersurface strictement pseudoconvexe en utilisant l'idée de l'équation de la chaleur du laplacien de Kohn introduite par Malliavin dans [4]. Ceci permet au paragraphe 3 d'obtenir des structures d'ouverts fins pour le potentiel euclidien usuel dans le cas de ces compacts ainsi que des compacts de Wermer–Basener, d'où aussitôt des renseignements sur les parties de Gleason, les mesures de Jensen et les dérivations d'ordre 1. Au paragraphe 4, on montre un résultat beaucoup plus fort: les compacts introduits précédemment possèdent de l'intérieur fin pour le processus à temps bidimensionnel; en utilisant une formule du type Itô introduite par Malliavin dans [5] et la méthode de [6], on déduit l'existence des dérivées $\partial^2 f/\partial z_1\, \partial z_2$ pour les fonctions de l'algèbre.

Cette étude est tout a fait "expérimentale" en ce qu'elle n'aborde que des exemples très particuliers.

1. Frontière et Parties de Jensen d'une Algèbre de Fonctions

Notations. Soit X un compact, A une algèbre de fonctions complexes sur X, M le spectre de A. On peut toujours supposer que X est la frontière de Silov de A.

On se pose le problème général suivant: *construire un processus de diffusion $m_\omega(t)$ adapté à A au sens où pour tout $f \in A$, $f(m_\omega(t))$ soit une martingale complexe conforme, i.e., un brownien complexe changé de temps.*

Par exemple si le spectre de A est équipé d'une structure analytique au sens de [2] qui rend holomorphes les fonctions $f \in A$, alors tout processus kählérien est adapté à A. Le but de ce travail est de montrer que dans certains cas particuliers, *malgré l'absence de structures analytiques, on peut construire de tels processus-adaptés.* On a trivialement

Lemme 1. *Si un processus adapté à A existe, alors pour tout $f \in A$, $\log |f(m_\omega(t))|$ est une sous martingale et en particulier partant de $m_0 \in M$, la loi de $m_\omega(T)$ où T est un temps d'arrêt quelconque est une mesure de Jensen de m_0.*

Preuve. En effet si $f(m_\omega(t))$ est martingale conforme, alors $\log |f(m_\omega(t))|$ est une sous martingale comme on le voit aussitôt puisque $f(m_\omega(t))$ est brownien complexe changé de temps. Ensuite on peut toujours supposer $|f| \leqslant 1$. Alors pour tout n,

$$\mathrm{Inf}(-\log |f(m_\omega(t))|, n)$$

est une surmartingale $\geqslant 0$, bornée par n, donc pour tout temps d'arrêt T, on a

$$E_{m_0}(\mathrm{Inf}(-\log |f(m_\omega(T))|, n) \leqslant \mathrm{Inf}(-\log |f(m_0)|, n)$$

si $n \to +\infty$, $\mathrm{Inf}(-\log |f(m_\omega(T))|, n)$ croît vers $-\log |f(m(T))|$, d'où le résultat,

$$\log |f(m_0)| \leqslant E_{m_0}(+\log |f(m_\omega(T))|).$$

Par conséquent, une condition nécessaire d'existence de processus adaptés $m_\omega(t)$ partant de m_0, est que le point m_0 admette des mesures de Jensen non triviales (i.e., $\neq \delta m_0$); sinon le processus partant de m_0 y reste indéfiniment. Bien entendu pour l'algèbre $\mathscr{C}(X)$ des fonctions continues, le seul processus adapté est le processus trivial. Cependant, il existe des algèbres de fonctions analytiques naturelles différentes de $\mathscr{C}(X)$ pour lesquelles le seul processus adapté est le processus trivial: prenons par exemple K compact de $\mathbb{C}$ et l'algèbre $R(K)$ des fonctions qui s'approchent uniformément sur K par des fonctions holomorphes au voisinage de K.

On a vu en [1] que un point $m_0 \in K$ a une mesure de Jensen non triviale si et seulement si m_0 est intérieur fin de K pour le potentiel logarithmique usuel de $\mathbb{C}$. Dans ce cas, un processus adapté est le brownien complexe standard issu de m_0 stoppé au temps de sortie de l'intérieur fin de K. On peut ainsi poser la définition suivante.

DÉFINITION 1. On appelle frontière de Jensen J de A, les points x (de X nécessairement) tels que la seule mesure de Jensen de ce point x soit δ_x. J contient les points-pics de A. Les raisonnements usuels d'analyse fonctionnelle permettent de montrer

LEMME 2. *Tout $m \in M$ admet une mesure de Jensen portée par J.*

DÉFINITION 2. Notons $p \sim q$ ($p, q \in M$) si et seulement si p et q ont des mesures de Jensen mutuellement absolument continues sur J.

Cette relation n'est pas une relation d'équivalence (contrairement à la relation analogue qui permet de définir les parties de Gleason): en effet considérons dans $\mathbb{C}^2$, le compact $K = \Delta_1 \cup \Delta_2$ ou Δ_1 et Δ_2 sont deux disques contenus respectivement dans $\{z_2 = 0\}$ et $\{z_1 = 0\}$ centrés en 0 et l'algèbre des fonctions analytiques sur K. Tout point de $\{z_2 = 0\}$ est en relation avec $(0, 0)$(il suffit de considérer l'intégrale de Poisson sur $\partial\Delta_1$). De même tout point de $\{z_1 = 0\}$ est en relation avec $(0, 0)$. Cependant il est immédiat de voir que la seule mesure de Jensen de $(z_1, 0)$ (resp. de $(0, z_2)$) pour $z_1 \neq 0$ (resp. $z_2 \neq 0$) est l'intégrale de Poisson de $\partial\Delta_1$ (resp. $\partial\Delta_2$), donc $(z_1, 0)$ et $(0, z_2)$ ne sont pas en relation si $z_1 \neq 0$ et $z_2 \neq 0$.

DÉFINITION 3. On appelle partie de Jensen, les parties maximales de M telle que la restriction de la relation $\sim$ à cette partie soit une relation d'équivalence et telle que cette partie soit une seule classe d'équivalence pour cette relation $\sim$.

Les points frontières de Jensen sont à eux seuls une partie de Jensen. Dans l'exemple du compact K ci-desus, les parties de Jensen (outre les points frontière de Jensen) sont les deux disques ouverts $\mathring{\Delta}_1$ et $\mathring{\Delta}_2$.

De même que les structures analytiques sont associées aux parties de Gleason de A, les théories du potentiel semblent être associées aux parties de Jensen (une inégalité de type Harnack étant directement associée à l'absolue continuité des mesures harmoniques).

EXEMPLE. Dans le cas de l'algèbre $R(K)$ d'une variable complexe, les parties de Jensen non triviales sont exactement les composantes connexes fines de l'intérieur fin de K.

THÉORÈME 1. *Soit P une partie de Jensen non triviale de M pour l'algèbre A, $f \in A$, f non constante sur P. Pour tout $m_0 \in P$, $f(m_0)$ est intérieur fin à $f(M)$ (au sens du potentiel usuel de $\mathbb{C}$).*

Preuve. Sinon $f(m_0)$ est frontière fin de $f(M)$. Soit μ_0 mesure de Jensen de m_0 dans M non triviale et soit $f_*(\mu_0)$. Par le calcul symbolique, $f_*(\mu_0)$ est mesure de Jensen de l'algèbre du compact $R(f(M))$ donc d'après [1] est $\delta_{f(m_0)}$, d'où μ_0 est portée par $f^{-1}(f(m_0))$. Soit $m \in P$, $m \neq m_0$ (qui existe car P est non triviale); choisissons deux mesures de Jensen μ_0 et μ de m_0 et m non triviales et absolument continues l'une par rapport à l'autre. On déduit alors que μ est portée par $f^{-1}(f(m_0))$. Mais alors,

$$\begin{aligned} \int f\,d\mu &= f(m) && \text{(car } \mu \text{ est mesure de Jensen de } m\text{)} \\ &= f(m_0) && \text{(car } \mu \text{ est portée par } f^{-1}(f(m_0))\text{).} \end{aligned}$$

D'où f est constante sur P.

COROLLAIRE. *Soit K compact de $\mathbb{C}^n$ convexe par rapport à une algèbre de fonctions A contenant $z_1 \cdots z_n$ et soit $p \in K$ qui n'est pas frontière de Jensen de A. Alors il existe $1 < i < n$ tel que $z_i(p)$ soit intérieur fin à $z_i(K)$. En particulier dans ce cas, K a nécessairement une mesure de Hausdorff deux-dimensionnelle > 0.*

Preuve. Si $z_i(p)$ est frontière fin de $z_i(K)$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, et si μ est mesure de Jensen de p, on a alors que $(z_i)_*(\mu)$ est $\delta_{z_i(p)}$ comme dans le Théorème 1, d'où μ est portée par p et est donc triviale. Comme les projections diminuent la mesure de Hausdorff deux-dimensionelle et que la mesure de Hausdorff deux-dimensionnelle d'un ouvert fin est > 0 (voir [1]), on conclut.

2. CONSTRUCTION D'ENVELOPPES HOLOMORPHIQUEMENT CONVEXES DE CERTAINS COMPACTS

Notations. Soient z, w les coordonnées de $\mathbb{C}^2$ et soit un domaine circulaire défini par l'équation

$$D = \{(z, w)/|\, z\,|^2 \leqslant \psi(|\, w\,|^2)\}$$

où ψ est une fonction analytique réelle et nous supposons *D strictement pseudoconvexe*. Notons S l'hypersurface $|z|^2 = \psi(|w|^2)$.

LEMME 3. *La fonction* $w \to \log \psi(|w|^2)$ *est surharmonique.*

Preuve. On a

$$\frac{\partial \log \psi(|w|^2)}{\partial w} = \frac{\psi'(|w|^2)\bar{w}}{\psi(|w|^2)}$$

$$\frac{\partial^2 \log \psi(|w|^2)}{\partial w\, \partial \bar{w}} = \frac{\psi'(|w|^2)\,\psi(|w|^2) + |w|^2\,\psi''(|w|^2)\,\psi(|w|^2) - |w|^2\,\psi'^2(|w|^2)}{\psi^2(|w|^2)}.$$

Posons $\phi(z, w) = |z|^2 - \psi(|w|^2)$, ainsi

$$\Delta \log \psi(|w|^2) = \frac{1}{\psi(|w|^2)^2}\,(-\mathscr{L}(\phi))|_{|z|^2=\psi(|w|^2)}$$

où $\mathscr{L}(\phi)$ est le déterminant de Lévi de ϕ

$$\mathscr{L}(\phi) = -\text{dét}\begin{pmatrix} 0 & \phi_{\bar{w}} & \phi_{\bar{z}} \\ \phi_w & \phi_{w\bar{w}} & \phi_{w\bar{z}} \\ \phi_z & \phi_{z\bar{w}} & \phi_{z\bar{z}} \end{pmatrix} > 0$$

car D est strictement pseudoconvexe.

Soit maintenant K compact du plan w sur lequel nous supposerons que ψ ne s'annule pas pour simplifier.

Nous supposerons K à bord régulier tel que $K = \mathring{\bar{K}}$ et nous introduisons

$$X_K = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2/w \in K,\ (z, w) \in S\}.$$

Nous appelons $u(w)$ la solution du problème de Dirichlet posé par la donnée au bord de $K - \frac{1}{2}\log \psi(|w|^2)$. Alors on a trivialement

LEMME 4. $(z, w) \to \log |z| + u(w)$ *est plurisousharmonique et pluriharmonique là où* $z \neq 0$. *Si* $(z, w) \in X_K$ *on a* $u(w) \geqslant -\log |z|$.

Posons alors

$$\tilde{X}_K = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2/|z|^2 \leqslant \psi(|w|^2) \quad \text{et} \quad u(w) + \log |z| \geqslant 0\}.$$

THÉORÈME 2. *L'enveloppe holomorphiquement convexe de* X_K *est* $\tilde{X}_K$.

Preuve. Clairement $\tilde{X}_K$ étant ouvert d'homorphie de par sa forme, il suffit de voir qu'une fonction holomorphe au voisinage de X_K se prolonge à $\tilde{X}_K$. Soit S_1 la surface $u(w) + \log |z| = 0$ $(w \in K)$. Soit $u_t(w) = tu(w) - (1 - t) \frac{1}{2} \log \psi(|w|^2)$ qui est famille de fonctions strictement sous harmoniques sur K dépendant de $t \in [0, 1]$ et soit S_t la surface $\log |z| + u_t(w) = 0$ $(w \in K)$. Les hypersurface S_t s'appuient toutes sur le bord de X_K dans S. et sont strictement pseudoconvexes sauf S_1 qui est pseudoconvexe à forme de Lévi nulle. Localement on peut paramétrer $\mathbb{C}^2$ en utilisant la coordonnée t et les coordonnées tangentielles à S_t.

LEMME 5. *Soit S hypersurface de $\mathbb{C}^2$, V et JV les deux champs de vecteurs réels tangents à S, conjugés complexes et orthonormés et $\Delta_S = \mathscr{L}_V{}^2 + \mathscr{L}_{JV}^2$ le laplacien de Kohn de S. Si ϕ est pluriharmonique, on a* $\Delta_S\phi + \mathscr{L}_{J[V,JV]}\phi = 0$.

Fin du Théorème 2. Pour tout $0 \leqslant t \leqslant 1$, soit l'équation

$$\Delta_{S_t} + \mathscr{L}_{J[V_t,JV_t]} = 0$$

où (V_t, JV_t) est une famille dépendant analytiquement de $t \in [0, 1]$ des champs complexes conjugés tangents à S_t. On écrit $J[V_t, JV_t] = W_t + N_t$ où W_t est un vecteur réel tangent à S_t et N_t un vecteur normal *euclidien* à S_t non nul si $t \neq 1$ car alors S_t est strictement pseudoconvexe; quitte à changer W_t, et Δ_{S_t} on peut supposer $N_t = \partial/\partial t$ d'où il existe un opérateur différentiel du second ordre à coefficients analytiques réels $\mathscr{D}_{S_t}$ de sorte que les fonctions pluriharmonique au voisinage de S_t satisfont $(\partial/\partial t)\phi = \mathscr{D}_{S_t}\phi$ et $\mathscr{D}_{S_t}$ est sous elliptique au sens de Hörmander $(t < 1)$.

Soit alors f holomorphe au voisinage de X_K $S = S_0$ et appliquons lui le semi groupe de l'équation de la chaleur inhomogène précédente, soit P_t ; alors $P_t(f|_{X_K})$ est fonction analytique réelle pour $0 \leqslant t \leqslant 1$; de plus f étant holomorphe au voisinage de X_K, pour t petit, f satisfait l'équation de la chaleur précédente, donc $f = P_t(f|_{X_K})$ au voisinage de X_K pour t petit. Or $\partial P_t(f|_{X_K})/\partial \bar{z} = 0$ au voisinage de $t = 0$ et est analytique réelle, donc elle est 0 sur tout $\tilde{X}_K$ et $P_t(f|_{X_K})$ est le prolongement analytique cherché de f.

Preuve du lemme 5 (*voir aussi* [4]). Si f est holomorphe au voisinage de S avec $f = \phi + i\psi$, on a $\mathscr{L}_V f = i\mathscr{L}_{JV} f$ par Cauchy Riemann, d'où $\mathscr{L}_V{}^2\phi + \mathscr{L}_{JV}^2\phi = \mathscr{L}_{[V,JV]}\psi = -\mathscr{L}_{J[V,JV]}\phi$.

Remarque 1. La démonstration du Théorème 2 s'applique plus généralement au cas d'un compact X porté par une hypersurface S strictement pseudoconvexe (X étant à bord régulier sur S) *dès que l'on* *sait construire une hypersurface Σ passant par $\partial_S X$ dont la forme de Lévi est identiquement nulle.*

Dans ce cas l'enveloppe holomorphiquement convexe de X est exactement le domaine de $\mathbb{C}^2$ bordé par S et Σ ainsi que le montre le raisonnement précédent. Le fait que l'on utilise une hypersurface du type particulier considéré plus haut intervient uniquement dans la construction de Σ qui est ramenée à la résolution du problème de Dirichlet.

Remarque 2. On obtient ainsi une preuve très courte du théorème de Hartogs. On peut également citer le théorème de Basener [3] qui peut se démontrer de la même façon que le Théorème 2:

THÉORÈME 3. *Soit Δ^2 le bidisque de $\mathbb{C}^2$, K compact de Δ tel que $\partial\Delta \subset K$ et K à bord régulier avec $\mathring{\bar{K}} = K$.*
Soit $X_K = \{(z, w) \in \Delta^2/ |z| = 1, w \in K\} \cup \{(z, w) \in \Delta^2/ |w| = 1, z \in K\}$ Soit $u(z)$ la solution du problème de Dirichlet sur K tel que $u = 0$ sur $\partial\Delta$, $u = 1$ sur les autres composantes connexes de ∂K. Alors l'enveloppe rationnellement convexe de X_K est

$$h_r(X_K) = \{(z, w) \in \Delta^2/u(z) + u(w) \leqslant 1\}.$$

Ici les parties à forme de Lévi nulle du bord de $h_r(X_k)$ sont $\{u(z) + u(w) = 1\}$ et les parties de $X_K - \partial_{\Delta^2} X_K$.

Application: Sélections continues de mesures de Jensen. Si D^2 est domaine d'holomorphie de $\mathbb{C}^2$, notons $A(D^2)$(resp. $H(D^2)$) l'algèbre des fonctions holomorphes sur D^2 continues sur $\bar{D}^2$ (resp. l'algèbre des fonctions holomorphes qui s'approchent uniformément sur $\bar{D}^2$ par des fonctions holomorphes au voisinage de $\bar{D}^2$).

1. *Construction de Diffusions Adaptées à $A(D)$*

THÉORÈME 4. *Dans le cas de $A(\tilde{X}_K)$ (resp. $A(h_r(X_K))$) on peut construire une sélection continue de la mesure de Jensen de cette algèbre portée par les points de stricte pseudoconvexité du bord (resp. portée par $\partial_{\Delta^2} X_K$).*

Preuve. C'est une adaptation de la méthode de [7].

(a) Cas de $A(\tilde{X}_K)$. On utilise la diffusion correspondant à la métrique

$$ds^2 = -\partial\bar{\partial}\, \mathrm{Log}[(u(w) + \mathrm{Log}\, |z|)(\psi(|w|^2) - |z|^2)].$$

On pose $q(z, w) = u(w) + \mathrm{Log}\, |z|$, $p(z, w) = |z|^2 - \psi(|w|^2)$, et on a $\tilde{X}_K = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid q(z, w) \geqslant 0, p(z, w) \leqslant 0\}$.

Comme pour toute fonction holomorphe f Log $|f|$ est sous harmonique pour toute métrique Kählérienne, il suffit de montrer que la mesure harmonique de cette métrique ne charge pas

$$\{(z, w) \in \mathbb{C}^2/q(z, w) = 0, p(z, w) > 0\}.$$

A cet effet on fait les remarques suivantes.

1. Comme ψ ne s'annule pas sur K on a pour tout (z, w) de $\tilde{X}_K$ $z \neq 0$, de sorte que q est pluriharmonique dans $\tilde{X}_K$ et $\nabla q \neq 0$ dans $\tilde{X}_K$.

2. $+p$ est strictement plurisousharmonique dans $\tilde{X}_K$ et C^2 jusqu'au bord.

Ce qui fait que

$$ds^2 = \frac{-\partial\bar{\partial}p}{p} + \frac{|\partial p|^2}{p^2} + \frac{|\partial q|^2}{q^2}$$

définit bien une métrique dans $\tilde{X}_K$.

3. $|\nabla u|$ est borné dans $\mathring{K}$ [8, p. 144].

On note par Δ le laplacien de la métrique et $\| \|_K$ la norme Kählérienne associée; par $X_\omega(t)$ la diffusion associée à la métrique, E^X l'espérance mathématique sachant que $X_\omega(0) = X = (z_0, w_0)$ et P^X la probabilité sachant que $X_\omega(0) = X$. En posant $\phi = -\mathrm{Log}(-pq)$ on a

$$\Delta\phi = 8, \qquad \|\nabla\phi\|_K \leqslant 2$$

puis comme dans [7, Lemme 2] la diffusion $X_\omega(t)$ a un temps de vie presque sûrement infini et converge presque sûrement vers un point de $\partial\tilde{X}_K$.

Il faut maintenant montrer que la diffusion ne peut converger vers un point de $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid q(z, w) = 0, -p(z, w) > 0\}$.

Pour cela on considère la fonction $f(z, w) = |z|^2 + |w|^2$. On a

$$(\Delta f)(z, w) = 4 \operatorname{trace}(g^{-1}(z, w)) \geqslant 4/(\inf_{\|e\|_E=1} \|g_{(z,w)}(e)\|_E)$$

où g désigne la matrice de la métrique et $\|\cdot\|_E$ la norme euclidienne.

Soient H_p la matrice du Hessien de p, A_p la matrice de $|\partial p|^2$, A_q celle de $|\partial q|^2$, $v = (\partial u/\partial w, -1/2z)$, et $e = v/\|v\|_E$, on a $A_q(e) = 0$ d'où

$$\inf_{\|e\|_E=1} \|g_{(z,w)}(e)\|_E \leqslant \frac{\|H_{p(z,w)}(e)\|_E}{-p} + \frac{\|A_{p(z,w)}(e)\|_E}{p^2},$$

quantité que l'on majore par $an + bn^2$ dans

$$D_n = \left\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid q(z, w) > 0, \quad -p(z, w) \geqslant \frac{1}{n}\right\}$$

d'où sur $D_n (\Delta f)(z, w) \geqslant 4/(an + bn^2) = C_n > 0$.

Si $X_\omega(t)$ converge vers le "côté" $\{q = 0\}$ il existe n_0, T, et ϵ tels que $P^X\{\omega \mid X_\omega(t) \in D_{n_0} \ \forall\, t > T\} = P^X\{\mathscr{A}_T\} = \epsilon > 0$.

On projette alors la diffusion par la fonction f et on prend l'espérance:

$$C^{ste} \geqslant E^X[f(X_\omega(t)) - f(X_\omega(T))] = \tfrac{1}{2} E^X \left[\int_T^t (\Delta f)(X_\omega(s))\, ds\right]$$

$$C^{ste} > \tfrac{1}{2} \int_T^t \int_{\mathscr{A}_T} (\Delta f)(X_\omega(s))\, ds\, d\, P^X(\omega) \geqslant C_{n_0} \epsilon (t - T)/2$$

d'où la contradiction en faisant tendre t vers $+\infty$.

De sorte que la mesure harmonique dans

$$\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid q(z, w) = 0 \quad -p(z, w) > 0\} \text{ est } 0.$$

(b) Cas de $A(h_r(X_K))$. On utilise ici la diffusion correspondant à la métrique

$$ds^2 = -\partial\bar\partial \operatorname{Log}[(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)(1 - u(z) - u(w))];$$

on pose

$$f(z) = 1 - |z|^2, \qquad g(w) = 1 - |w|^2, \qquad h(z, w) = 1 - u(z) - u(w).$$

La matrice de la métrique est alors

$$(g_{i\bar j}) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{f^2} + \dfrac{|\partial u/\partial z|^2}{h^2}, & \dfrac{\partial u/\partial z \cdot \overline{\partial u/\partial w}}{h^2} \\ \dfrac{\overline{\partial u/\partial z} \cdot \partial u/\partial w}{h^2}, & \dfrac{1}{g^2} + \dfrac{|\partial u/\partial w|^2}{h^2} \end{pmatrix}.$$

$$\operatorname{Trace}(g_{i\bar j}) = \frac{1}{f^2} + \frac{1}{g^2} + \frac{|\partial u/\partial z|^2 + |\partial u/\partial w|^2}{h^2} > 0 \qquad \text{dans } \overline{\overset{\circ}{h_r(X_K)}}$$

$$\text{Dét}(g_{i\bar j}) = \frac{h^2 + g^2 |\partial u/\partial w|^2 + f^2 |\partial u/\partial z|^2}{f^2 g^2 h^2} > 0 \qquad \text{dans } \overline{\overset{\circ}{h_r(X_K)}}.$$

On a donc bien une métrique dans le domaine.

Ici aussi la sélection continue de la mesure de Jensen de cette algèbre sera la mesure harmonique de la métrique considérée. Il nous faut alors montrer que la mesure harmonique ne charge pas les ensembles

$$A_f = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid f(z) = 0, \quad h(z, w) > 0, \quad g(w) > 0\},$$

$$A_g = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid g(w) = 0, \quad h(z, w) > 0, \quad f(z) > 0\},$$

$$A_h = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid h(z, w) > 0, \quad f(z) > 0, \quad f(w) > 0\}.$$

On utilisera les mêmes notations qu'en (a) avec $\phi = -\operatorname{Log} fgh$ on a $\Delta\phi = 8$, $\| \nabla\phi \|_K \leqslant 3$ d'où ici aussi temps de vie presque sûrement infini et convergence presque sûre vers la frontière topologique de $h_r(X_K)$.

On considère encore la fonction $\psi(z, w) = |z|^2 + |w|^2$ sur le domaine $h_r(X_K)$.

$$(g^{i\bar{j}}) = \frac{1}{h^2 + g^2 \mid \partial u/\partial w \mid^2 + f^2 \mid \partial u/\partial z \mid^2} \begin{pmatrix} f^2h^2 + f^2g^2 \left| \dfrac{\partial u}{\partial w} \right|^2, & -f^2g^2 \dfrac{\partial u}{\partial z} \cdot \overline{\dfrac{\partial u}{\partial w}} \\ -f^2g^2 \overline{\dfrac{\partial u}{\partial z}} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial w}, & g^2h^2 + f^2g^2 \left| \dfrac{\partial u}{\partial z} \right|^2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta\psi = \frac{h^2(f^2 + g^2) + f^2g^2(\mid \partial u/\partial z \mid^2 + \mid \partial u/\partial w \mid^2)}{h^2 + g^2 \mid \partial u/\partial w \mid^2 + f^2 \mid \partial u/\partial z \mid^2}.$$

On a encore $| \Delta u |$ borné dans $\mathring{K}$ par [8, p. 144] d'où dans $h_r(X_K)$ $h^2 + g^2 \mid \partial u/\partial w \mid^2 + f^2 \mid \partial u/\partial z \mid^2 \leqslant C$ et sur A_f

$$\Delta\psi \geqslant h^2g^2/C$$

sur A_g

$$\Delta\psi \geqslant h^2f^2/C$$

sur A_h

$$\Delta\psi \geqslant \left(f^2g^2 \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial w} \right|^2\right)/C.$$

On montre alors exactement comme au (a) que la mesure harmonique de la métrique ne charge ni A_f ni A_g ni

$$A_h \cap \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid \nabla h(z, w) \neq 0\}.$$

Maintenant comme la frontière de K est régulière et que u atteint son maximum en tout point de $\partial K - \partial\Delta$.

On a $\nabla u \neq 0$ dans un voisinage de $\partial K - \partial\Delta$ [8, p. 65] de sorte qu'il existe au plus un nombre fini de points $(z_1, w_1), \ldots, (z_p, w_p)$ de A_h où $\nabla h = 0$. Si la mesure harmonique charge ces points il existe i

tel que $P^x\{\omega \mid X_\omega(t) \to (z_i, w_i), t \to +\infty\} > 0$. Soit alors la fonction holomorphe dans $h_r(X_K)$ définie par

$$k(z, w) = \frac{\partial u(z)}{\partial x} - i\frac{\partial u(z)}{\partial y} + \frac{\partial u(w)}{\partial r} - i\frac{\partial u(w)}{\partial s}$$

(où $z = x + iy$, $w = r + is$). $k(X_\omega(t))$ est alors un brownien complexe changé de temps qui converge vers 0 sur un ensemble de probabilité > 0 lorsque $t \to +\infty$ et ceci n'est pas possible. La mesure harmonique ne charge donc pas A_h.

Dans le cas de $H(\tilde{X}_K)$ (resp. $H(h_r(X_K))$) il existe une méthode plus simple de construire une sélection continue de la mesure de Jensen portée par les points de stricte pseudoconvexité du bord (resp. portée par $\partial_{\Delta^2} X_K$), en autorisant la diffusion sur le bord.

Faisons le par exemple pour $\tilde{X}_K$: on va construire un processus de diffusion $Y_\omega(t)$ de temps de vie J tel que $Y_\omega(J)$ soit dans les points de stricte pseudoconvexité du bord et évidemment si $f \in H(\tilde{X}_K)$, $f(Y_\omega(t))$ est une martingale:

(i) Partant d'un point $X_0(z_0, w_0)$ de $\overset{\circ}{\tilde{X}}_K$ on considère le brownien euclidien standard b_t de $\mathbb{C}^2$ partant de X_0, stopé au premier temps de rencontre T_1 avec $\partial\tilde{X}_K$. Si $b_{T_1} \in X_K$ on pose $J = T_1$ et on stoppe définitivement le processus; si $b_{T_1} \in \partial X_K - X_K$ (i.e., $b_{T_1} \in \Sigma$) on repart ainsi.

(ii) Soit $X_1 = (Z_1, W_1) \in \Sigma$ et $\sigma_t(\omega)$ la diffusion *sur* Σ associée à l'opérateur *tangentiel* à Σ $\mathscr{D}_\Sigma = \Delta_\Sigma + \mathscr{L}_{J[V,JV]}$ où Δ_Σ est le laplacien de Kohn de Σ et V, JV le couple de champs tangents complexes conjugés. Comme Σ est à forme de Lévi nulle, $J[V, JV]$ est tangent à Σ et par le Lemme 5, $\mathscr{D}_\Sigma$ annule les fonctions holomorphes au voisinage de Σ. On stoppe σ au premier temps T_2 de rencontre de S et on pose $J = T_2$.

(iii) Si $X_2 = (Z_2, W_2) \in X_K$, on pose $J = 0$ et le processus partant de X_1 est trivial.

On recolle les deux processus en utilisant le lemme élémentaire suivant.

LEMME 6. *Pour tout $X_0 \in \tilde{X}_K$, il existe une unique probabilité $\mathbb{P}^{X_0}$ sur $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+, \tilde{X}_K)$ (chemins continus de $\mathbb{R}^+$ dans $\tilde{X}_K$) ayant les propriétés suivantes:*

(i) $\mathbb{P}^{X_0}|_{\mathscr{T}_{T_1}} = \mathbb{P}^{X_0}_{\Delta_{\text{euc}}}|_{\mathscr{T}_{T_1}}$ *où T_1 est le premier temps de rencontre de $\partial\tilde{X}_K$, $\mathscr{T}_{T_1}$ sa tribu, $\mathbb{P}^{X_0}_{\Delta_{\text{euc}}}$ la probabilité du laplacien euclidien standard.*

(ii) $\mathbb{P}^{X_0}(\cdot \mid \mathscr{T}_{T_1})|_{\text{tribu du futur de } T_1} = \mathbb{P}^{Y_{T_1}}_{\mathscr{D}_\Sigma}|_{\text{tribu du futur de } T_1}$ *où* $Y_{T_1}(\omega) = \omega(T_1(\omega))$ *si* $\omega \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^+, \tilde{X}_K)$ *et* $\mathscr{D}_\Sigma$ *est l'opérateur sur* Σ *introduit précédemment.*

3. Enveloppes Holomorphiquement Convexes et Potentiel Fin

Reprenons les notations du 2, mais cette fois K étant un compact *quelconque* de $\mathbb{C}$ où la fonction ψ ne s'annule pas. Notons K' l'intérieur fin de K dans $\mathbb{C}$.

Théorème 5. *Il y a deux cas possible seulement*:

(i) *ou bien* $K' = \varnothing$, *auquel cas* $\tilde{X}_K = X_K$ *(ou* $\tilde{X}_K$ *est enveloppe holomorphiquement convexe de* X_K*),*

(ii) *ou bien, il existe* $W_0 \in K'$, *auquel cas la fibre de* W_0 *dans* $\tilde{X}_K$ $(\{(z, w_0)/(z, w_0) \in \tilde{X}_K\})$ *est strictement plus grande que la fibre de* W_0 *dans* X_K $(\{(z, w_0)/(z, w_0) \in X_K\})$.

Preuve. (1) Écrivons $K = \bigcap_n K_n$ où $(K_n)_n$ est suite décroissante de compacts de $\mathbb{C}$ à bords réguliers en sorte que $\bigcap_n X_{K_n} = X_K$ et il est immédiat de voir que $\bigcap_n \tilde{X}_{K_n} = \tilde{X}_K$; pour tout n, soit $u_n(w)$ la solution du problème de Dirichlet posé par la donnée $-\frac{1}{2}\log\psi(|w|^2)$ sur ∂K_n. Comme $-\frac{1}{2}\log\psi(|w|^2)$ est sous-harmonique, la suite $(u_n)_n$ (considérée sur K) est suite décroissante et elle est bornée (car ψ ne s'annule pas sur K_n si n est assez grand).

(2) Prolongeons u_n par $-\frac{1}{2}\log(\psi(|w|^2))$ au voisinage de K_n. On obtient alors une suite de fonctions sous harmoniques continues au voisinage de K qui décroit vers une fonction v scs ayant manifestement la propriété de sous-moyenne au voisinage de K et qui vaut $-\frac{1}{2}\log\psi(|w|^2)$ hors de K. D'après [8] cette fonction est donc finement continue et finement sous harmonique au voisinage de K; mais sur l'intérieur fin K' de K, $v|_{K'} = \operatorname{Inf} u_n|_{K'}$, il est immédiat de voir que $v|_{K'}$ est finement harmonique car $(u_n|_{K'})_n$ est suite décroissante bornée de fonctions finement harmoniques, (voir [8]). A la frontière fine, la limite v vaut $-\frac{1}{2}\log\psi(|w|^2)$ parce que v vaut $-\frac{1}{2}\log\psi(|w|^2)$ hors de K et est finement continue comme toute fonction sous harmonique. Par suite $v|_{K'}(w')$ tend vers $-\frac{1}{2}\log\psi(|w|^2)$ lorsque $w' \in K'$ tend finement vers $w \in \partial_f K$ puisque v est finement continue au voisinage usuel de K. Ainsi $v|_{K'}$ est la solution du problème de Dirichlet fin posé par $-\frac{1}{2}\psi(|w|^2)$ au bord fin de K lorsque K' est non vide. Lorsque K' est vide, on a toujours une suite décroissante comme précédemment, et $v|_{\mathscr{C}K} = -\frac{1}{2}\log\psi(|w|^2)$ au

voisinage de K. Comme $K' = \varnothing$ et $-\frac{1}{2}\log\psi(|w|^2)$ et v sont finement continues puisque ce sont des fonctions finement sous harmoniques et sous harmoniques respectivement, et comme elles coïncident sur $\mathscr{C}K$, elles coïncident partout, d'où $v = -\frac{1}{2}\log\psi(|w|^2)$ sur K.

(3) Utilisant les remarques précédentes et le point (1), on déduit que dans tous les cas,

$$\tilde{X}_K = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 / |z|^2 \leqslant \psi(|w|^2), \quad v(w) + \log|z| \geqslant 0\}$$

Mais si $K' = \varnothing$, ceci est X_K et si K' est non vide, v est la solution du problème de Dirichlet fin posé par $-\frac{1}{2}\log\psi(|w|^2)$ sur $\partial_f K$.

COROLLAIRE. *Dans le cas où $K' = \varnothing$, $\tilde{X}_K$ a de l'intérieur fin pour le potentiel euclidien de dimension 4 de $\mathbb{C}^2$. En particulier pour tout $(z, w) \in \tilde{X}_K$ tel que $|z|^2 < \psi(|w|^2)$ et $v(w) > -\log|z|$, la partie de Gleason de (z, w) dans $\tilde{X}_K$ pour l'algèbre $H(X_K)$ est de mesure euclidienne quatre-dimensionnelle > 0.*

Preuve. $\tilde{X}_K$ est défini par $v(w) \geqslant -\log|z|$ et $\log|z| \leqslant \frac{1}{2}\log\psi(|w|^2)$; les fonctions de w finement harmoniques ou surharmoniques sur K' et $\log 1/|z|$ est trivialement sous harmonique, de sorte que $v(w) + \log|z|$ et $\frac{1}{2}\log\psi(|w|^2) + \log|z|$ sont finement continus, d'où le résultat.

Maintenant si $(z, w) \in \tilde{X}_K$ satisfait les inégalités strictes il est dans l'intérieur fin quatre-dimensionnel de $\tilde{X}_K$; considérons alors la composante connexe fine de (z, w) dans l'intérieur fin précédent; alors deux points de cette composante connexe fine ont des mesures de Keldych mutuellement absolument continues (voir [1]) et sont donc dans la même partie de Gleason (et même de Jensen); or un ouvert fin est de mesure quatre-dimensionnelle > 0.

On peut refaire le même raisonnement dans le cas des compacts introduits par Basener dans [3]; on obtient alors de façon exactement analogue:

THÉORÈME 6. *Soit K compact du disque unité Δ tel que $\partial\Delta \subset K$ et soit X_K le compact de $\partial\Delta^2$ dans $\mathbb{C}^2$ défini comme au 2. Alors il y a deux cas possibles*:

(a) *ou bien $K' = \varnothing$ et alors $h_r(X_K) = X_K$;*

(b) *ou bien il existe $w_0 \in K'$ et alors la fibre de w dans $h_r(X_K)$ est distincte de la fibre analogue dans X_K. Dans ce dernier cas on a*

$$h_r(X_K) = \{(z, w) / u(z) + u(w) \leqslant 1\},$$

où u est la solution du problème de Dirichlet fin sur K posé par la donnée 0 *sur* $\partial\Delta$ *et* 1 *sur* $\partial_f K - \partial\Delta$; *en particulier* $h_r(X_K)$ *a de l'intérieur fin pour le potentiel euclidien de dimension quatre, et si* $(z, w) \in \Delta^2$ *et* $u(z) + u(w) < 1$, *la partie de Gleason de* (z, w) *dans* $h_r(X_K)$ *est de mesure quatre-dimensionnelle* > 0.

Application au Calcul Différentiel pour $H(X_K)$

Reprenons l'une des deux situations des Théorèmes 3 ou 4. On a alors

THÉORÈME 7. *Soit* (z_0, w_0) *un point intérieur fin à* $\tilde{X}_K$ *ou* $h_r(X_K)$; *alors*

(1) *pour tout* $f \in H(X_K)$, *on peut définir des dérivées partielles premières presque partout dans* $(\tilde{X}_K)'$ *ou* $h_r(X_K)'$ *notées* $\partial f/\partial z$, $\partial f/\partial w$ *telles que* $\mathbb{P}^{(z_0, w_0)}$ *ps*

$$\begin{aligned} &f(Z_\omega(t \wedge T),\ W_\omega(t \wedge T)) - f(z_0, w_0) \\ &\quad = \int_0^{t\wedge T} (\partial f/\partial z)\, dZ_\omega(t) + \int_0^{t\wedge T} (\partial f/\partial w)\, dW_\omega(t) \end{aligned}$$

où (Z_ω, W_ω) *est le brownien standard de* $\mathbb{C}^2$ *et où* T *est le temps de sortie de* $(\tilde{X}_K)'$ (*resp.* $h_r(X_K)'$);

(2) *de plus si* $(f_n)_n$ *est suite d'approximation uniforme de* f *par des fonctions* f_n *holomorphes au voisinage usuel de* $\tilde{X}_K$ (*ou* $h_r(X_K)$), *alors les suites*

$$(\partial f_n/\partial z)_n \qquad et \qquad (\partial f_n/\partial w)_n$$

convergent au sens L^2 *local fin vers* $\partial f/\partial z$ *et* $\partial f/\partial w$, *respectivement.*

Preuve. C'est un cas particulier des résultats de [6] qui sont valables pour une fonction finement harmonique pour le potentiel euclidien usuel de $\mathbb{R}^4$.

4. LE PROCESSUS À TEMPS BIDIMENSIONNEL DE $\mathbb{C}^2$ ET LA TOPOLOGIE ASSOCIÉE

Nous utiliserons ici les idées de Malliavin développées dans [5] pour traiter les fonctions biharmoniques dans le bidisque. Soit Ω_1 et Ω_2 deux espaces de probabilités indépendants bu brownien standard sur $\mathbb{C}$ et $b^1_{\omega_1}(t_1)$ et $b^2_{\omega_2}(t_2')$ les trajectoires associées. Soit le processus

$(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to (b^1_{\omega_1}(t_1), b^2_{\omega_2}(t_2)) \in \mathbb{C}^2$. Ce processus est à trajectoires continues; on munit $\Omega_1 \times \Omega_2$ des tribus $\mathscr{B}_{t_1} \otimes \mathscr{B}_{t_2}$ et des probabilités produit $P_1 \otimes P_2$.

DÉFINITION. Si W est ouvert de $\mathbb{C}^2$, $f\colon W \to \mathbb{R}$ est dite bisousharmonique si pour tout $(Z_1, Z_2) \in W$, pour tout couple de disques $D_1 \times D_2$ centrés en (Z_1, Z_2), contenus dans W, on a $f(Z_1, Z_2) \leqslant M_{D_1 \times D_2}(f)$ (où $M_{D_1 \times D_2}(f)$ est la moyenne de f sur la frontière distinguée du bidisque $D_1 \times D_2$) et si de plus f est scs. On a facilement par itération

LEMME 7. *Si f est bisousharmonique dans l'ouvert W pour tout $(Z_1^0, Z_2^0) \in W$, tout bidisque $D_1 \times D_2 \subset W$ de centre (Z_1^0, Z_2^0), le processus $f(b^1_{\omega_1}(t_1 \wedge T_{D_1}), b^2_{\omega_2}(t_2 \wedge T_{D_2}))$ est une bisousmartingale par rapport à la suite de tribus $\mathscr{B}_{t_1 \wedge T_{D_1}} \otimes \mathscr{B}_{t_2 \wedge T_{D_2}}$.*

Preuve. On choisit $s_1 \leqslant t_1$ et $s_2 \leqslant t_2$ et on regarde:

$$E(f(b^1_{\omega_1}(t_1 \wedge T_{D_1}), b^2_{\omega_2}(t_2 \wedge T_{D_2})) | \mathscr{B}_{s_1 \wedge T_{D_1}} \otimes \mathscr{B}_{s_2 \wedge T_{D_2}})$$

$$= E^1(E^2(f(b^1_{\omega_1}(t_1 \wedge T_{D_1}), b^2_{\omega_2}(t_2 \wedge T_{D_2})) | \mathscr{B}_{s_2 \wedge T_{D_2}}, \omega_1) | \mathscr{B}_{s_1 \wedge T_{D_1}}).$$

Si f est bisousharmonique $w \to f(z, w)$ est sousharmonique, d'où

$$\geqslant E^1(f(b^1_{\omega_1}(t_1 \wedge T_{D_1}), b^2_{\omega_2}(s_2 \wedge T_{D_2})) | \mathscr{B}_{s_1 \wedge T_{D_1}})$$

$$\geqslant f(b^{(1)}_{\omega_1}(s_1 \wedge T_{D_1}), b^{(2)}_{\omega_2}(s_2 \wedge T_{D_2})).$$

DÉFINITION. On appelle topologie fine du biprocessus, la topologie dont les ouverts $U \in \mathbb{C}^2$ sont les parties de $\mathbb{C}^2$ telles que le bitemps de sortie T_U de U soit > 0 au sens suivant: pour tout $(z_0, w_0) \in U$, $P^1_{z_0} \otimes P^2_{z_0}$ *ps* en (ω_1, ω_2), il existe (t_1, t_2) avec $t_1 > 0$, $t_2 > 0$ tel que $(b^1_{\omega_1}(s_1), b^2_{\omega_2}(s_2)) \in U$ pour tout $(s_1, s_2) \leqslant (t_1, t_2)$ (la relation d'ordre sur les couples d'instants étant équivalente à $s_1 \leqslant t_1$ et $s_2 \leqslant t_2$). Il est clair qu'on définit ainsi une topologie.

LEMME 8. (1) *La topologie fine du biprocessus est plus fine que la topologie produit des topologies fines de chaque composante (z, w) et strictement moins fine que la topologie fine euclidienne quatre-dimensionnelle de $\mathbb{C}^2$.*

(2) *Soit U ouvert fin pour la topologie fine produit dans $\mathbb{C}^2$,*

$(z_0, w_0) \in U$, *V une variété analytique complexe de dimension* 1, *passant par* (z_0, w_0). *Alors* $U \cap V$ *est un ouvert fin pour la topologie fine usuelle de la variété* V.

Preuve. (1) Soit $U_1 \times U_2$ un produit d'ouverts fins de $\mathbb{C}$, $(z_0, w_0) \in U_1 \times U_2$, T_1 et T_2 le temps de sortie du brownien standard partant de z_0 et w_0 de U_1 et U_2. Alors pour $(s_1, s_2) \leqslant (T_1, T_2)(b^1_{\omega_1}(s_1), b^2_{\omega_2}(s_2)) \in U_1 \times U_2$. De même pour l'autre inclusion.

(2) Représentons localement V par l'équation $w = \psi(z)$ où ψ est holomorphe près de z_0 ; on peut supposer V régulière en z_0. Considérons le processus $(b^{(1)}_{\omega_1}(s), \psi(b^{(1)}_{\omega_1}(s))) \in V$: c'est le brownien standard de V à un changement de temps près. Mais $\psi(b^{(1)}_{\omega_1}(s))$ est aussi un brownien complexe standard changé de temps, donc du type $\tilde{b}_{\tilde{\omega}_1}(\tau(s))$ où $\omega_1 \to \tilde{\omega}_1$ conserve la mesure. On peut toujours supposer $U = U_1 \times U_2$ (U_i ouverts fin de $\mathbb{C}$); clairement alors pour s assez petit $\tilde{b}_{\tilde{\omega}_1}(\tau(s)) \in U_2$ et $b^{(1)}_{\omega_1}(s) \in U_1$, donc $(b^{(1)}_{\omega_1}(s), \psi(b^{(1)}_{\omega_1}(s))) \in V \cap U$.

EXEMPLES. Les exemples traités au 3, contiennent des produits d'ouverts fins $U_1 \times U_2$; en effet dans les deux cas les compacts $\tilde{X}_K$ et $h_r(X_K)$ sont définis par des inégalités du type $\alpha(w) + \beta(z) < 0$ où α et β sont finement sousharmonique ou harmonique, dans $\mathbb{C}$, donc sont finement continus, d'où le résultat de façon immédiate.

Remarque. Pour un produit d'ouverts fins $U_1 \times U_2$, on peut parler du *temps de sortie* d'un biprocessus: il est défini simplement par $T_{U_1 \times U_2}(\omega_1, \omega_2) = (T_{U_1}(\omega_1), T_{U_2}(\omega_2))$.

Redémontrons maintenant la formule de Itô pour le biprocessus introduite dans [5].

LEMME 9. *Soit f une fonction C^4 dans un bidisque $D_1 \times D_2$ de centre* $(0, 0)$; *soit* $T(\omega_1, \omega_2) = T_1(\omega_1), T_2(\omega_2))$ *un temps d'arrêt factorisé du biprocessus. On a alors*

$$\begin{aligned} f(b^{(1)}_{\omega_1}(T_1), b^{(2)}_{\omega_2}(T_2)) \\ &= f(0,0) + \int_0^{T_1} (\vec{\nabla}_1 f)(b^{(1)}_{\omega_1}(s_1), 0) \cdot d\vec{b}^{(1)}_{\omega_1}(s_1) \\ &+ \tfrac{1}{2} \int_0^{T_1} (\Delta_1 f)(b^{(1)}_{\omega_1}(s_1), 0)\, ds_1 \\ &+ \int_0^{T_2} (\vec{\nabla}_2 f)(0, b^{(2)}_{\omega_2}(s_2)) \cdot d\vec{b}^{(2)}_{\omega_2}(s_2) + \tfrac{1}{2} \int_0^{T_2} (\Delta_2 f)(0, b^{(2)}_{\omega_2}(s_2))\, ds_2 \end{aligned}$$

$$+\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}(\vec{\nabla}_1\vec{\nabla}_2 f)(b_{\omega_1}^{(1)}(s_1),\ b_{\omega_2}^{(2)}(s_2))\cdot \vec{d}b_{\omega_1}^{(1)}(s_1)\cdot \vec{d}b_{\omega_2}^{(2)}(s_2)$$
$$+\tfrac{1}{2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}(\vec{\nabla}_1(\Delta_2 f))(b_{\omega_1}^{(1)}(s_1),\ b_{\omega_2}^{(2)}(s_2))\cdot \vec{d}b_{\omega_1}^{(1)}(s_1)\,ds_2$$
$$+\tfrac{1}{2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}(\vec{\nabla}_2(\Delta_1 f))(b_{\omega_1}^{(1)}(s_1),\ b_{\omega_2}^{(2)}(s_2))\cdot \vec{d}b_{\omega_2}^{(2)}(s_2)\,ds_1$$
$$+\tfrac{1}{4}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}(\Delta_1\Delta_2 f)(b_{\omega_1}^{(1)}(s_1),\ b_{\omega_2}^{(2)}(s_2))\,ds_1\,ds_2$$

où $\vec{\nabla}_1$ est le gradient $(\partial/\partial x_1\,,\ \partial/\partial y_1)$ selon $z_1 = x_1 + iy_1$ et $\vec{\nabla}_2$ le gradient selon z_2 et Δ_1 et Δ_2 sont les laplaciens partiels en z_1 et z_2, respectivement.

Preuve. On écrit via Itô en supposant les points de départ (0, 0):

$$f(b_{\omega_1}^{(1)}(T_1),\ b_{\omega_2}^{(2)}(T_2)) - f(b_{\omega_1}^{(1)}(T_1),\ 0) = \int_0^{T_2}(\vec{\nabla}_2 f)(b_{\omega_1}^{(1)}(T_1),\ b_{\omega_2}^{(2)}(s_2))\,\vec{d}b_{\omega_2}^{(2)}(s_2)$$
$$+\tfrac{1}{2}\int_0^{T_2}(\Delta_2 f)(b_{\omega_1}^{(1)}(T_1),\ b_{\omega_2}^{(2)}(s_2))\,ds_2\ ; \qquad (1)$$

$$(\vec{\nabla}_2 f)(b_{\omega_1}^{(1)}(T_1),\ b_{\omega_2}^{(2)}(s_2))$$
$$= (\vec{\nabla}_2 f)(0,\ b_{\omega_2}^{(2)}(s_2)) + \int_0^{T_1}(\vec{\nabla}_1(\vec{\nabla}_2 f))(b_{\omega_1}^{(1)}(s_1),\ b_{\omega_2}^{(2)}(s_2))\vec{d}b_{\omega_1}^{(1)}(s_1) \qquad (2)$$
$$+\tfrac{1}{2}\int_0^{T_1}(\Delta_1(\vec{\nabla}_2 f))(b_{\omega_1}^{(1)}(s_1),\ b_{\omega_2}^{(2)}(s_2))\,ds_1\ ;$$

$$(\Delta_2 f)(b_{\omega_1}^{(1)}(T_1),\ b_{\omega_2}^{(2)}(s_2))$$
$$= (\Delta_2 f)(0,\ b_{\omega_2}^{(2)}(s_2)) + \int_0^{T_1}(\vec{\nabla}_1(\Delta_2 f))(b_{\omega_1}^{(1)}(s_1),\ b_{\omega_2}^{(2)}(s_2))\,\vec{d}b_{\omega_1}^{(1)} \qquad (3)$$
$$+\tfrac{1}{2}\int_0^{T_1}(\Delta_1\Delta_2 f)(b_{\omega_1}^{(1)}(s_1),\ b_{\omega_2}^{(2)}(s_2))\,ds_2\,,$$

et on reporte alors les formules (2) et (3) dans (1) et ensuite on développe

$$f(b_{\omega_1}^{(1)}(T_1),\ 0) = \int_0^{T_1}(\vec{\nabla}_1 f)(b_{\omega_1}^{(1)}(s_1),\ 0)\,\vec{d}b_{\omega_1}^{(1)}(s_1)$$
$$+\tfrac{1}{2}\int_0^{T_1}(\Delta_1 f)(b_{\omega_1}^{(1)}(s_1),\ 0)\,ds_1\,.$$

LEMME 10. *Soit f biharmonique au voisinage du bidisque $D_1 \times D_2$ de centre $(z_1\,,\ z_2)$ et soit $(T_1^{(\omega_1)},\ T_2^{(\omega_2)})$ un bitemps d'arrêt du biprocessus inférieur au bitemps de sortie du bidisque $D_1 \times D_2$.*

Alors on a

$$
\begin{aligned}
&E_{z_1,z_2}(f^2(b^{(1)}_{\omega_1}(T_1),\ b^{(2)}_{\omega_2}(T_2))) \\
&\quad = f^2(z_1\,,z_2) + \tfrac{1}{2} E_{z_1,z_2} \left(\int_0^{T_1} |\, \vec{\nabla}_1 f(b^{(1)}_{\omega_1}(s_1)\ z_2\, |^2\, ds_1\right) \\
&\quad + \tfrac{1}{2} E_{z_1,z_2} \left(\int_0^{T_2} |\, \vec{\nabla}_2 f(z_1 b^{(2)}_{\omega_2}(s_2))|^2\, ds_2\right) \\
&\quad + \tfrac{1}{4} E_{z_1,z_2} \left(\int_0^{T_1}\int_0^{T_2} |\, \vec{\nabla}_1\, \vec{\nabla}_2 f(b^{(1)}_{\omega_1}(s_1),\ b^{(2)}_{\omega_2}(s_2))|^2\, ds_1\, ds_2\right).
\end{aligned}
$$

Preuve. On applique le Lemme 9 avec f^2 en utilisant l'identité bien connue sur les fonctions harmoniques usuelles

$$\Delta(u^2) = |\, \nabla u\, |^2,$$

puis ensuite on prend l'espérance mathématique sur le biprocessus partant de $(z_1\,, z_2)$. Les espérances des intégrales stochastiques simples sont nulles, par exemple,

$$\int_0^{T_1} (\vec{\nabla}_1(f^2))(b^{(1)}_{\omega_1}(s_1),\ z_2)\ d\vec{b}^{(1)}_{\omega_1}(s_1)$$

a une espérance nulle: il suffit d'intégrer d'abord en ω_1 à ω_2 fixé et d'utiliser le fait que $T_1(\omega_1)$ *ne dépend que de* ω_1. Cette espérance est alors 0, car c'est l'espérance d'une intégrale stochastique. De même un terme comme

$$\int_0^{T_1}\int_0^{T_2} (\vec{\nabla}_1(\nabla_2 f))(b^{(1)}_{\omega_1}(s_1),\ b^{(2)}_{\omega_2}(s_2))\ d\vec{b}^{(1)}_{\omega_1}(s_1)\ ds_1$$

a une espérance nulle: car fixant ω_2 et intégrant en ω_1 on trouve puisque $T_2(\omega_2)$ *ne dépend que de* ω_2

$$E_{(2)} \left(\int_0^{T_2} ds_2 E_{(1)} \int_0^{T_1} (\vec{\nabla}_1(\Delta_2 f))(b^{(1)}_{\omega_1}(s_1),\ b^{(2)}_{\omega_2}(s_2))\ d\vec{b}^{(1)}_{\omega_1}(s_1)\right) = 0$$

car l'espérance $E_{(1)}$ est celle d'une intégrale stochastique usuelle par rapport au brownien $b^{(1)}_{\omega_1}(s_1)$, donc est nulle.

Reprenons maintenant les exemples de compacts du 3, à savoir X_K dont l'enveloppe holomorphiquement convexe est $\tilde{X}_K$ (resp. dont l'enveloppe rationnelle convexe est $h_r(X_K)$). On a démontré ci-dessus que $\tilde{X}_K$ et $h_r(X_K)$ contiennent de l'intérieur fin pour le biprocessus (et même de l'intérieur fin pour la topologie fine produit des topologies fines de chaque composante de $\mathbb{C}$).

THÉORÈME 8. *Soit $f \in H(\tilde{X}_K)$ (resp. $f \in H(h_r(X_K))$) et soit $f_n)_n$ suite d'approximation uniforme de f par des fonctions holomorphes au voisinage de $\tilde{X}_K$ (resp. de $h_r(X_K)$)*

(1) *pour tout (z_1^0, z_2^0) qui est intérieur fin à $\tilde{X}_K$ (ou $h_r(X_K)$) pour la topologie produit des topologies fines, on peut définir presque partout sur la droite complexe $z_1 = z_1^0$ un gradient $(\partial f/\partial z_1)(z_1^0, z_2)$; presque partout sur la droite complexe $z_2 = z_2^0$ un gradient $(\partial f/\partial z_2)(z_1, z_2^0)$; presque partout en volume euclidien usuel de $\mathbb{C}^2$, un bigradient $(\partial f/(\partial z_1, \partial z_2))(z_1, z_2)$ de telle sorte que pour tout bitemps de sortie $(T_1(\omega_1), T_2(\omega_2))$ d'un biouvert fin de $\tilde{X}_K$ (resp. $h_r(\tilde{X}_K)$) contenant (z_1^0, z_2^0), on ait la formule de Itô généralisée*

$$
\begin{aligned}
f(b^{(1)}_{\omega_1}(T_1), b^{(2)}_{\omega_2}(T_2)) \\
&= f(z_1^0, z_2^0) + \int_0^{T_1} (\partial f/\partial z_1)(b^{(1)}_{\omega_1}(s_1), z_2^0)\, db^{(1)}_{\omega_1}(s_1) \\
&\quad + \int_0^{T_2} (\partial f/\partial z_2)(z_1^0, b^{(2)}_{\omega_2}(s_2))\, db^{(2)}_{\omega_2}(s_2) \\
&\quad + \int_0^{T_1}\int_0^{T_2} (\partial^2 f/\partial z_1\, \partial z_2)(b^{(1)}_{\omega_1}(s_1), b^{(2)}_{\omega_2}(s_2)\, db^{(1)}_{\omega_1}(s_1) db^{(2)}_{\omega_2}(s_2);
\end{aligned}
$$

(2) *de plus la suite $((\partial f_n/\partial z_1)(z_1, z_2^0))_n$ (resp. $((\partial f_n/\partial z_2)(z_1^0, z_2))_n$) converge au sens L^2 local fin sur la droite complexe $z_2 = z_2^0$ (resp. $z_1 = z_1^0$) vers $(\partial f/\partial z_1)(z_1, z_2^0)$ resp. $(\partial f/\partial z_2)(z_1^0, z_2)$) et il existe C_1, C_2 ne dépendant pas de f avec*

$$|(\partial f/\partial z_1)(z_1, z_2^0)| \leqslant C_1 \|f\|_{X_K}, \qquad |(\partial f/\partial z_2)(z_1^0, z_2)| \leqslant C_2 \|f\|_{X_K};$$

(3) *la suite $((\partial^2 f_n/\partial z_1 \partial z_2)(z_1, z_2))_n$ converge au sens L^2 local pour la topologie produit des topologies fines, vers $(\partial^2 f/\partial z_1\, \partial z_2)(z_1, z_2)$.*

Preuve. Elle suit la même méthode que [6] par utilisation des intégrales d'énergie pour une fonction biharmonique; en effet, pour tout n, f_n étant holomorphe au voisinage de $\tilde{X}_K$ (resp. $h_r(X_K)$) est biharmonique donc on peut appliquer la formule du Lemme 10 à $f_n - f_m$ et au bitemps de sortie de $U_1 \times U_2$ ou $\overline{U_1 \times U_2} \subset \tilde{X}_K$ (resp. $h_r(X_K)$) et U_i sont des ouverts fins de $\mathbb{C}$. Par conséquent on déduit:

(1) $(\partial f_n/\partial z_1)(b^{(1)}_{\omega_1}(s_1), z_2{}^0)$ est suite de Cauchy pour la norme $\| e(s_1, \omega_1)\|^2 = E_{z_1}(\int_0^{T_1} | e(s_1, \omega_1)|^2 ds_1)$ d'où la convergence au sens de cette norme vers une variable aléatoire qui est $b^{(1)}_{\omega_1}(s_1)$-measurable donc se factorise par $b^{(1)}_{\omega_1}(s_1)$ et qu'on note $(\partial f/\partial z_1)(b^{(1)}_{\omega_1}(s_1), z_2{}^0)$ de plus cette norme est plus forte que la norme L^2 sur un ouvert fin voisinage fin de $(z_1{}^0, z_2{}^0)$ contenu dans $(z_2 = z_2{}^0) \cap U_1$ où la fonction de Green de l'ouvert fin $(z_2 = z_2{}^0) \cap U_1$ est minorée, d'où la convergence L^2 locale fine sur $z_2 = z_2{}^0$ et également la convergence presque sûre des intégrales stochastiques correspondantes.

(2) En ce qui concerne le bigradient, il faut utiliser la norme

$$\| e(s_1, \omega_1, s_2, \omega_2)\|^2 = E_{z_1, z_2}\left(\int_0^{T_1}\int_0^{T_2} | e(s_1, \omega_1, s_2, \omega_2)|^2 ds_1\, ds_2\right)$$

d'où la convergence des variables aléatoires $(\partial^2 f_n/\partial z_1\, \partial z_2)(b^{(1)}_{\omega_1}(s_1), b^{(2)}_{\omega_2}(s_2))$ au sens de cette norme vers $\partial f/\partial z_1\, \partial z_2$ qui est définie presque partout pour les lois de $(b^{(1)}_{\omega_1}(s_1), b^{(2)}_{\omega_2}(s_2))$, i.e., presque partout pour le volume euclidien. Pour passer alors à la convergence L^2 locale pour la topologie produit des topologies fines, on utilise le fait élémentaire que

$$E_{z_1^0, z_2^0}\left(\int_0^{T_1}\int_0^{T_2} |(\partial^2 f/\partial z_1\, \partial z_2)(b^{(1)}_{\omega_1}(s_1), b^{(2)}_{\omega_2}(s_2))|^2 ds_1\, ds_2\right)$$
$$= \int_{U_1}\int_{U_2} |(\partial^2 f/\partial z_1\, \partial z_2)(z_1, z_2)|^2 g_{U_1}(z_1{}^0, z_1)\, g_{U_2}(z_2{}^0, z_2)\, dz_1\, d\bar{z}_1\, dz_2\, d\bar{z}_2,$$

où g_{U_i} désigne la fonction de Green de l'ouvert fin U_i de $\mathbb{C}$ (voir [6]) et on procède alors comme dans [6] en se restreignant à un produit de sous ouverts fins de $U_1 \times U_2$ où le produit des fonctions de Green de U_1 et U_2 est minoré.

Remarque. En utilisant le potentiel du biprocessus, et le Lemme 8, on peut obtenir des dérivations complexes bornées le long des traces sur $\tilde{X}_K$ des variétés complexes de dimension 1, lorsque ces variétés passent par un point intérieur fin pour la topologie fine produit.

ERRATUM

Nous profitions de cet article pour faire quelques corrections et remarques à propos de l'article "Potentiel fin et algèbres de fonctions analytiques II" (voir [1, II]).

Dans [6] la théorie de la différentiabilité des fonctions finement harmoniques a été établie seulement pour les dérivées premières mais n'a pas été démontrée pour les dérivées d'ordre > 1. Par conséquent l'assertion qui suit l'énoncé du [1, II, Théorème 0, p. 297] n'est pas démontrée pour $p > 1$; de la même façon, les résultats des Théorèmes 1, p. 299; corollaires 1 et 2 pp. 299 et 300; Théorèmes 3 (resp. 5), p. 305 (resp. 307) qui utilisent de la différentiation des fonctions finement harmoniques à l'ordre > 1 restent à démontrer.

Mais tous ces résultats sont vrais pour toutes les dérivées des fonctions de $R(K)$ à condition de se restreindre à un ouvert fin finement dense de K' à cause des Lemme 1, p. 298, et Théorème 4, p. 305.

Acknowledgment

Nous tenons à exprimer nos remerciements à Monsieur P. Malliavin à qui nous devons en particulier les idées d'utiliser les intégrales d'aires des processus à temps bidimensionnel et l'équation de la chaleur du laplacien de Kolm.

References

1. A. Debiard et B. Gaveau, Potentiel fin et algèbres de fonctions analytiques I, II, *J. Funct. Anal.* Juillet (1974), Novembre (1974); Frontière de Jensen d'un algèbre de fonctions, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Janvier (1975).
2. G. Stobzenberg, A Hull with no analytic structure, *J. Math. Mech.* (1964).
3. R. Basener, On some rationnally convex hulls, *Trans. Amer. Math. Soc.*, Août (1973); "Rationally Convex Hulls and Potential Theory," preprint, Yale University, 1974.
4. P. Malliavin, Équation de la chaleur associée à une fonction d'exhaustion psh, à paraître.
5. P. Malliavin, Processus à temps bidimensionnel dans le bidisque.
6. A. Debiard et B. Gaveau, Différentiabilité des fonctions finement harmoniques, *Invent. Math.*, à paraître.
7. A. Debiard et B. Gaveau, Frontière de Silov de domaines faiblement pseudoconvexes de $\mathbb{C}^n$, à paraître.
8. M. H. Protter et H. F. Weinberger, "Maximum Principle in Differential Equations," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1967.
9. B. Fuglede, "Actes du Congrès Inter. Maths, Nice, 1970," Gauthier-Villars, Paris.